

УДК 639.2.053.7+573.22.087.1.001.57

## Решение балансовых уравнений для модели промыслового истощения неизолированной популяции

*А. А. Михеев*

Сахалинский научно-исследовательский институт рыбного хозяйства и океанографии (СахНИРО,  
г. Южно-Сахалинск)

e-mail: alex \_ mikheyev@sakhniro.ru

Известный класс моделей истощения промыслового запаса (модели Лесли и Де Лури) расширен на случай неизолированной популяции. Динамика локального открытого запаса под влиянием промысла описана с помощью балансовых дифференциальных уравнений. Модель истощения для однородного по пространству запаса представлена в виде задачи Коши. Её решение получено методом вариации постоянной. Аналогичная модель для неоднородного по пространству запаса сформулирована как задача Неймана с нестационарными граничными условиями. Решение этой задачи получено в виде функций источника.

**Ключевые слова:** запасы, промысел, модели истощения, неизолированная популяция, краевая задача, дифференциальные уравнения.

### ВВЕДЕНИЕ

Как известно, в арсенале промысловой биологии имеются специальные математические модели, позволяющие оценивать облавливаемый запас по его истощению в процессе лова на основе информации о производительности промысла [Засосов, 1976; Рикер, 1979, Бородин, 1980]<sup>1</sup>. Указанная информация регулярно поступает в отраслевой центр данных, а при необходимости собирается на промысловых судах наблюдателями. Кроме того, она может быть получена рыбохозяйственными институтами и по собственным программам, предусматривающим лов с имитацией промыслового

режима. Доступность этих данных делает модели истощения привлекательным инструментом оценки запасов.

Как правило, в моделях истощения постулируется, что уловы на единицу промыслового усилия прямо пропорциональны обилию, что позволяет рассматривать их как индексы запаса. В первых моделях истощения, помимо этого, требовалось, чтобы в процессе лова запас не пополнялся, и отсутствовали непромысловые факторы убыли — естественная смертность и эмиграция. Это важное и вместе с тем серьёзное упрощение, влекущее за собой множество проблем. Ещё одно предположение состояло в том, что промысловое воздействие на запас рассматривалось как однородное по пространству. Для реализации указанных допущений на практике приходилось выбирать

<sup>1</sup> В данной связи в зарубежной литературе на указанные модели часто ссылаются как на «модели истощения запаса» (stock depletion models, depletion experiments [Royer et al., 2002]).

достаточно короткий период лова, а район промысла ограничивать. Отсюда появился способ оценки запаса, получивший название «метода полигонов», где под полигоном понимался ограниченный промысловый участок с замкнутым (изолированным) и невозполнимым локальным запасом [Засосов, 1976].

Классические модели истощения были реализованы в виде дискретных уравнений связи между индексом запаса и накопленным уловом или накопленным промысловым усилием в формулировках Лесли и Де Лури соответственно [Leslie, Davis, 1939; De Lury, 1947]. Через параметры указанных уравнений можно оценить запас на начало лова средствами регрессионного анализа [Braaten, 1969].

Вместе с тем для достоверного оценивания параметров в названных моделях необходимо, чтобы в процессе изъятия падение индекса запаса было заметным [Бабаян и др., 1984]. Для изолированного и невозполнимого запаса данное условие выполняется гарантировано (при условии, что производительность промысла достаточно высока). Однако в реальности эксплуатируемые популяции проявляют себя по большей части как открытые, даже на ограниченном отрезке времени [McAllister et al., 2004]. Сюда же подпадают случаи неучтённого вылова в пределах полигона, данный вылов можно рассматривать как своего рода эмиграцию.

Из сказанного выше следует, что условие изолированности запаса существенно ограничивает применение классических моделей истощения. Отсюда стремление построить аналогичные модели для открытой популяции. Обобщение, учитывающее наличие миграций, при обязательном использовании данных мечения сделал К. Кетчен [Ketchen, 1953]. Другие обобщения на случай открытого запаса принимали в расчёт естественную смертность и пополнение [Allen, 1966; Шарпан, 1974; Бородин, 1980]. Различные генерализованные версии моделей истощения успешно применяются вплоть до последнего времени [Бородин, 1982; Rosenberg et al., 1990; Royer et al., 2002; McAllister et al., 2004]. Современный этап развития рассматриваемых моделей характеризуется применением более совершенных статистических процедур оценки параметров, например, использующих иерар-

хические байесовские методы [McAllister et al., 2004].

Тем не менее, на сегодняшний день модели данного типа, в которых в явном виде описывалась бы зависимость запаса и уловов от пространственных координат, отсутствуют. Вместе с тем отмечено, что если пространственная неоднородность запаса и производительности промысла влияет на их динамику, то пространственные координаты требуется ввести в модель [McAllister et al., 2004]. В ряде случаев главный интерес представляет оценка вклада в облавливаемый запас миграций, а пространственные эффекты внутри полигона могут быть проигнорированы. Поэтому целесообразно построить модель истощения неизолированной популяции как зависимую от пространственных координат, так и её пространственно однородный вариант. Решению этих двух задач и будет посвящена данная работа.

## МАТЕРИАЛ И МЕТОДИКА

Прежде всего, оговорим, что «локальным» будем называть небольшой запас, стабильно облавливаемый на ограниченном участке относительно короткое время. В данном исследовании рассматриваются только локальные запасы.

Материалом для исследования послужили модели промыслового истощения открытого запаса, как однородного, так и неоднородного по пространству. Все факторы, влияющие на динамику такого запаса, в этом исследовании поделены на учтённые и неучтённые. К первым отнесены уловы, а ко вторым — миграции и нелегальный вылов.

Методика исследования состояла в решении балансовых уравнений для открытой популяции в пространственно однородном и пространственно неоднородном случаях. При решении указанных уравнений был использован ряд методов, соответствующих рассматриваемым моделям:

решение задачи Коши для обыкновенного неоднородного линейного дифференциального уравнения методом вариации постоянного, методом подстановки; сведением к уравнению в дифференциалах с последующим интегрированием по частям или с применением формулы Ньютона-Лейбница [Степанов, 1950];

решение краевой задачи для однородного линейного уравнения в частных производных

с диффузией и стоком и неоднородными краевыми условиями последовательным разложением исходной задачи на ряд более простых задач, решаемых, в свою очередь, с помощью подстановок, метода разделения переменных, метода источников (потенциалов, функций Грина), теоремы Фубини о перемене порядка интегрирования [Игнатъева и др., 1964; Тихонов, Самарский, 1977; Владимиров, 1981].

Для полноты изложения приведено решение для модели истощения замкнутой популяции.

### РЕЗУЛЬТАТЫ

**Решение балансовых уравнений для модели изолированной однородной эксплуатируемой популяции.** В качестве модели истощения для замкнутой пространственно однородной популяции используются известные в литературе балансовые уравнения [Баранов, 1918] с предположением, что естественная смертность равна нулю:

$$\frac{dN(t)}{dt} = -FN(t); N(0) = N_0; \quad (1.1)$$

$$\frac{dC(t)}{dt} = FN(t); C(0) = 0, \quad (1.2)$$

где  $N(t)$  и  $C(t)$  — непрерывные дифференцируемые функции, описывающие убыль запаса и рост изъятия со временем  $t$  в процессе лова соответственно;  $F$  — показатель промысловой смертности.

Решение задачи Коши для обыкновенного однородного линейного дифференциального уравнения (1.1) находится двойкой. Первый способ заключается в разделении переменных  $dN(t)/N(t) = -Fdt$  и интегрировании, дающем решение в форме Де Лури:

$$N(t) = N_0 e^{-Ft}. \quad (1.3)$$

Другой способ состоит в приравнении левых частей уравнений (1.1) и (1.2)

$$dN(t)/dt = -dC(t)/dt$$

и интегрировании, дающем решение в форме Лесли:

$$N(t) = N_0 - C(t). \quad (1.4)$$

Эквивалентные равенства для улова получаются либо интегрированием уравнения (1.2) либо непосредственно из уравнения (1.4):

$$\begin{aligned} C(t) &= F \int_0^t N(\tau) d\tau = \\ &= N_0 (1 - e^{-Ft}) = N_0 - N(t). \end{aligned} \quad (1.5)$$

**Решение балансовых уравнений для модели открытой пространственно однородной эксплуатируемой популяции.** Если в уравнение (1.1) добавить непрерывную функцию времени  $m(t)$ , задающую результирующий вклад в запас неучтенных факторов, — в частности, миграций, — то получим балансовые уравнения для открытой пространственно однородной эксплуатируемой популяции:

$$\frac{dN(t)}{dt} = -FN(t) + m(t); N(0) = N_0; \quad (2.1)$$

$$\frac{dC(t)}{dt} = FN(t); C(0) = 0, \quad (2.2)$$

где все остальные обозначения приведены в разделе 1.

Решение задачи Коши для обыкновенного неоднородного линейного дифференциального уравнения (2.1) можно найти несколькими способами. Согласно методу вариации постоянного решение имеет вид [Степанов, 1950]:

$$N(t) = c(t) e^{-\int_0^t F d\tau}, \quad (2.3)$$

где  $c(t)$  — произвольная непрерывная дифференцируемая функция.

Подставив выражение (2.3) в исходное уравнение (2.1) и сделав несколько простых преобразований, получим, что <sup>2</sup>

$$c'(t) e^{-\int_0^t F d\tau} = m(t).$$

<sup>2</sup> Верхние штрихи здесь и далее в данном разделе обозначают дифференцирование по переменной  $t$ .

Отсюда нашли конкретный вид функции

$$c(t) = \int_0^t m(\tau) e^{\int_0^\tau F d\theta} d\tau + c_1.$$

Подставив  $c(t)$  в формулу (2.3) и учтя начальное условие из (2.1), нашли константу интегрирования  $c_1 = N_0$ .

Таким образом, имеем общее решение:

$$N(t) = N_0 e^{-Ft} + \int_0^t m(\tau) e^{-F(t-\tau)} d\tau. \quad (2.4)$$

Другой способ, дающий то же самое решение, состоит в использовании в задаче (2.1) подстановки  $\tilde{N}(t) = N(t) e^{Ft}$ .

Уравнение (2.2) решается также двумя способами, которые позволяют найти различные по виду, но эквивалентные решения. Первый способ состоит в складывании уравнений (2.1) и (2.2) и сведении результата к уравнению в дифференциалах

$$d[C(t) + N(t)] = m(t) dt.$$

Отсюда следует что:

$$C(t) = N_0 - N(t) + \int_0^t m(\tau) d\tau. \quad (2.5)$$

Второй способ заключается в преобразовании уравнения (2.2) к уравнению в дифференциалах и подстановке формулы (2.4):

$$dC(t) = F \left[ N_0 e^{-Ft} + \int_0^t m(\tau) e^{-F(t-\tau)} d\tau \right] dt.$$

В этом случае интегрирование дает решение:

$$C(t) = N_0 (1 - e^{-Ft}) + F \int_0^t e^{-F\tau} \int_0^\tau m(\theta) e^{F\theta} d\theta d\tau. \quad (2.6)$$

Учитывая, что

$$F e^{-F\tau} d\tau = d(-e^{-F\tau}),$$

и введя новые переменные:

$$u = \int_0^\tau m(\theta) e^{F\theta} d\theta; \quad du = \left[ \int_0^\tau m(\theta) e^{F\theta} d\theta \right]' d\tau;$$

$$v = -e^{-F\tau}; \quad dv = -d(e^{-F\tau}),$$

с помощью интегрирования по частям:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

и правила дифференцирования интеграла по верхнему пределу:

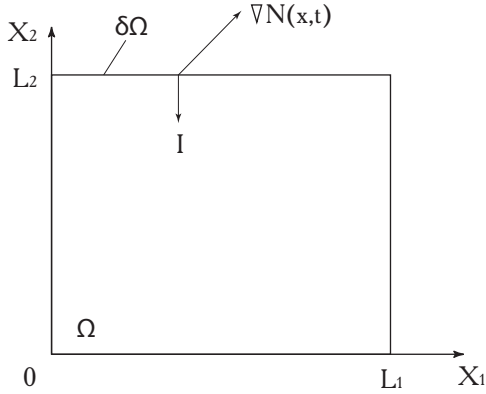
$$\left[ \int_0^\tau m(\theta) e^{F\theta} d\theta \right]' = m(\tau) e^{F\tau}$$

можно преобразовать интеграл в правой части формулы (2.6):

$$F \int_0^t e^{-F\tau} \int_0^\tau m(\theta) e^{F\theta} d\theta d\tau = \int_0^t m(\tau) d\tau - \int_0^t m(\tau) e^{-F(t-\tau)} d\tau. \quad (2.7)$$

С помощью формул (2.4) и (2.7) легко проверить эквивалентность формул (2.5) и (2.6).

**Решение балансовых уравнений для модели открытой пространственно неоднородной эксплуатируемой популяции.** Введём ограниченную прямоугольную область на плоскости  $\Omega = [0, L_1] \times [0, L_2]$  показанную на рисунке. Рассмотрим указанную область как полигон, на котором ведётся промысел неизолированной популяции. Предполагается, что запас образует устойчивые промысловые скопления, так что внутри полигона выраженные перемещения вроде сезонных миграций отсутствуют. Все миграционные потоки происходят только на границе полигона. Тем самым выполняется условие открытости запаса. По аналогии с тепловым потоком [Тихонов, Самарский, 1977] вектор миграции представим направленным навстречу градиенту плотности популяции  $\nabla N(\mathbf{x}; t)$  (рисунок).



**Рис.** Схема полигона на плоскости.  $I$  — внутренняя единичная нормаль к границе  $\partial\Omega$  прямоугольной области  $\Omega$  (остальные обозначения приведены в тексте)

В рассматриваемом случае балансовые уравнения для популяции представляют собой краевую задачу для однородного линейного уравнения в частных производных с диффузией  $D\Delta N(\mathbf{x};t)$  и стоком  $FN(\mathbf{x};t)$  и неоднородными условиями: начальным (3.2) и граничным II рода (3.3):

$$\frac{\partial N(\mathbf{x};t)}{\partial t} = -FN(\mathbf{x};t) + D\Delta N(\mathbf{x};t). \quad (3.1)$$

$$N(\mathbf{x};0) = N'_0(\mathbf{x}),$$

$$\mathbf{x} \in \Omega = [0, L_1] \times [0, L_2], \quad (3.2)$$

$$I \cdot \nabla N(\mathbf{x};t)|_{\partial\Omega} = m(t), \quad t \geq 0, \quad (3.3)$$

где  $N(\mathbf{x},t)$  — запас в момент времени  $t$  в точке с координатами  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  на плоскости, непрерывная дифференцируемая функция;

$$\Delta \equiv \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2 \quad \text{и} \quad \nabla \equiv \left( \partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2 \right) —$$

операторы Лапласа и градиента на плоскости;  $D$  — константа, связанная с радиусом индивидуальной активности [Свирижев, 1987];  $N'_0(\mathbf{x})$  — начальная численность запаса в точке, непрерывная функция;  $m(t)$  — интенсивность миграционного потока на границе  $\partial\Omega$  (см. рис.), непрерывная функция времени; остальные обозначения см. выше.

Рассматриваемая задача с нестационарными граничными условиями II рода, задаваемы-

ми непрерывной дифференцируемой функцией, является корректно поставленной [Карслоу, Егер, 1964]. Согласно граничному условию (3.3) отрицательные значения функции  $m(t)$  соответствуют притоку мигрантов внутрь полигона (иммиграции), а положительные — эмиграции и неучтённому изъятию.

Подстановкой:

$$N(\mathbf{x};t) = \tilde{N}(\mathbf{x};t)e^{-Ft} \quad (3.4)$$

исходная задача сводится к задаче без стока:

$$\frac{\partial \tilde{N}(\mathbf{x};t)}{\partial t} = D\Delta \tilde{N}(\mathbf{x};t), \quad (3.1^*)$$

$$\tilde{N}(\mathbf{x};0) = N'_0(\mathbf{x}),$$

$$\mathbf{x} \in \Omega = [0, L_1] \times [0, L_2], \quad (3.2^*)$$

$$I \cdot \nabla \tilde{N}(\mathbf{x};t)|_{\partial\Omega} = M(t), \quad t \geq 0, \quad (3.3^*)$$

где  $M(t) = m(t)e^{Ft}$ .

Если известны решения  $n_1(\mathbf{x},t)$  и  $n_2(\mathbf{x},t)$  двух следующих задач:

$$\frac{\partial n_1(\mathbf{x};t)}{\partial t} = D\Delta n_1(\mathbf{x};t), \quad (3.1_1)$$

$$n_1(\mathbf{x};0) = N'_0(\mathbf{x}),$$

$$\mathbf{x} \in \Omega = [0, L_1] \times [0, L_2], \quad (3.2_1)$$

$$I \cdot \nabla n_1(\mathbf{x};t)|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \geq 0, \quad (3.3_1)$$

$$\frac{\partial n_2(\mathbf{x};t)}{\partial t} = D\Delta n_2(\mathbf{x};t), \quad (3.1_2)$$

$$n_2(\mathbf{x};0) = 0,$$

$$\mathbf{x} \in \Omega = [0, L_1] \times [0, L_2], \quad (3.2_2)$$

$$I \cdot \nabla n_2(\mathbf{x};t)|_{\partial\Omega} = M(t), \quad t \geq 0, \quad (3.3_2)$$

то легко проверить, что решение задачи (3.1\*) — (3.3\*) является их суммой:

$$\tilde{N}(\mathbf{x};t) = n_1(\mathbf{x};t) + n_2(\mathbf{x};t). \quad (3.5)$$

Общее решение задачи (3.1<sub>1</sub>) — (3.3<sub>1</sub>) можно представить в виде (Приложение 1 и 2):

$$n_1(\mathbf{x};t) = \iint_{\Omega} N'_0(\xi) G(\mathbf{x}, \xi; t) d\xi. \quad (3.6)$$

Общее решение задачи (3.1<sub>2</sub>) — (3.3<sub>2</sub>) можно представить в виде (Приложение 3):

$$\begin{aligned} n_2(\mathbf{x};t) &= \psi(\mathbf{x})M(t) + \\ &+ \iint_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi; t) \varphi(\xi) d\xi + \\ &+ \int_0^t \iint_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi; t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau; \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\psi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1,2} \frac{x_i (L_i - x_i)}{L_i};$$

$$\varphi(\mathbf{x}) = -\psi(\mathbf{x})m(0);$$

$$f(\mathbf{x};t) = D\kappa M(t) - \psi(\mathbf{x})M'(t),$$

где  $\kappa = -\Pi_{\Omega}/S_{\Omega}$ ;

$$\Pi_{\Omega} = 2 \sum_{i=1,2} L_i$$

и  $S_{\Omega} = L_1 L_2$  — периметр и площадь полигона соответственно.

В формулах (3.6) и (3.7) функция  $G(\mathbf{x}, \xi; t)$  является фундаментальным решением оператора  $\partial/\partial t - D\Delta$  в прямоугольнике  $\Omega = [0, L_1] \times [0, L_2]$  и имеет вид (см. Приложение 1):

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}, \xi; t) &= \frac{1}{S_{\Omega}} \sum_{k,j} \gamma_{k,j} e^{-\lambda_{k,j}^2 t} \cos\left(\frac{k\pi x_1}{L_1}\right) \times \\ &\times \cos\left(\frac{k\pi \xi_1}{L_1}\right) \cos\left(\frac{j\pi x_2}{L_2}\right) \times \\ &\times \cos\left(\frac{j\pi \xi_2}{L_2}\right), \quad k, j = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.8)$$

Собирая вместе формулы (3.4) — (3.7), получим общее решение исходной задачи (3.1) — (3.3) (см. Приложение 3):

$$N(\mathbf{x};t) = e^{-Ft} \iint_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi; t) N'_0(\xi) d\xi + M(\mathbf{x};t), \quad (3.9)$$

где миграционный член  $M(\mathbf{x};t)$  выражается формулой:

$$\begin{aligned} M(\mathbf{x};t) &= m(t)\psi(\mathbf{x}) - \\ &- m(0)e^{-Ft} \iint_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi; t) \psi(\xi) d\xi + \\ &+ \int_0^t \iint_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi; t - \tau) e^{-F(t-\tau)} \left[ \kappa Dm(\tau) - \right. \\ &\left. - F\psi(\xi)m(\tau) - m'(\tau)\psi(\xi) \right] d\xi d\tau. \end{aligned} \quad (3.10)$$

То, что формулы (3.9), (3.10) действительно дают решение, проверяется непосредственным дифференцированием и подстановкой результата в уравнения (3.1) — (3.3).

Если считать, что улов в каждой точке зависит от обилия только в данной точке, то для него можно использовать обыкновенное дифференциальное уравнение (1.2) с тем же начальным условием. В этом случае, учитывая, что промысловая смертность является константой (см. формулу (3.1)), имеем формулу для улова в точке:

$$C(\mathbf{x};t) = F \int_0^t N(\mathbf{x};\tau) d\tau. \quad (3.11)$$

**Сводимость решений балансовых уравнений для модели открытой эксплуатируемой популяции в пространственно неоднородном случае к пространственно однородному.** Если проинтегрировать выражение (3.9) по области  $\underline{\Omega}$ :

$$\begin{aligned} N(t) &= \iint_{\Omega} N(\mathbf{x};t) d\mathbf{x} = \\ &= \iint_{\Omega} \left( e^{-Ft} \iint_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi; t) N'_0(\xi) d\xi + M(\mathbf{x};t) \right) d\mathbf{x} = \\ &= e^{-Ft} \iint_{\Omega} N'_0(\xi) \left( \iint_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi; t) d\mathbf{x} \right) d\xi + \\ &+ \iint_{\Omega} M(\mathbf{x};t) d\mathbf{x} = e^{-Ft} \iint_{\Omega} N'_0(\xi) d\xi + \iint_{\Omega} M(\mathbf{x};t) d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

то в результате получим формулу для общей численности популяции на полигоне на момент времени  $t$ :

$$N(t) = e^{-Ft} N_0 + \iint_{\Omega} M(\mathbf{x}; t) d\mathbf{x}. \quad (4.1)$$

Из равенств (1.5) и (4.1) вытекает формула для улова на момент времени  $t$ :

$$C(t) = N_0(1 - e^{-Ft}) + F \int_0^t \iint_{\Omega} M(\mathbf{x}; \tau) d\mathbf{x} d\tau. \quad (4.2)$$

Сравнивая формулы (4.1) и (2.4), получаем, что верно равенство (Приложение 4):

$$\int_0^t m(\tau) e^{-F(t-\tau)} d\tau = \iint_{\Omega} M(\mathbf{x}; t) d\mathbf{x}. \quad (4.3)$$

Заметим, что в правой и левой частях равенства (4.3) стоят функции только от переменной  $t$ . Используя формулы (4.2), (4.3) имеем, что:

$$\begin{aligned} C(t) &= N_0(1 - e^{-Ft}) + F \int_0^t \iint_{\Omega} M(\mathbf{x}; \tau) d\mathbf{x} d\tau = \\ &= N_0(1 - e^{-Ft}) + F \int_0^t \int_0^{\tau} m(\theta) e^{-F(\tau-\theta)} d\theta d\tau = \\ &= N_0(1 - e^{-Ft}) + F \int_0^t e^{-F\tau} \int_0^{\tau} m(\theta) e^{F\theta} d\theta d\tau. \end{aligned}$$

Следовательно, формула (4.2) эквивалентна формуле (2.6).

Таким образом, модель истощения пространственно неоднородной популяции, представленная уравнениями (3.9) и (3.11), интегрированием по полигону (области  $\Omega$ ) сводится к модели пространственно однородной популяции, представленной уравнениями (2.4) и (2.5) / (2.6).

**Частный случай решения балансовых уравнений для открытой эксплуатируемой популяции с постоянным миграционным потоком.** Полученная модель пространственно неоднородной популяции общего вида, выраженная формулами (3.9) — (3.11), позволяет строить конкретные модели истощения для популяций, как однородных, так и неоднородных по пространству с различными начальными

распределениями запаса  $N_0(\mathbf{x})$  и его миграционными потоками  $m(t)$ .

В качестве примера рассмотрим частный случай моделей истощения с постоянной интенсивностью миграционного потока  $m(t)$  для популяций, как однородных, так и неоднородных, но суммированных по пространству.

Для открытой пространственно однородной эксплуатируемой популяции с соответствующей краевой задачей (2.1) — (2.2) поток приравняем константе  $m_0$ :

$$m(t) = m_0. \quad (5.1)$$

Для открытой пространственно неоднородной эксплуатируемой популяции с соответствующей краевой задачей (3.1) — (3.3) поток приравняем константе  $m'_0$ :

$$m(t) = m'_0. \quad (5.2)$$

Введение разных констант обусловлено необходимостью соблюдать размерность задач.

Общее решение для пространственно однородной популяции в рассматриваемом случае легко находится из формулы (2.4):

$$\begin{aligned} N(t) &= N_0 e^{-Ft} + \int_0^t m(\tau) e^{-F(t-\tau)} d\tau = \\ &= N_0 e^{-Ft} + \frac{m_0}{F} (1 - e^{-Ft}) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Отсюда и из формулы (1.5) имеем соответствующее уравнение для улова:

$$\begin{aligned} C(t) &= N_0(1 - e^{-Ft}) + \\ &+ m_0 \left[ t - \frac{1}{F} (1 - e^{-Ft}) \right] \end{aligned} \quad (5.4)$$

или с учётом формулы (5.3):

$$C(t) = N_0 - N(t) + m_0 t. \quad (5.5)$$

Прежде чем вывести уравнения для запаса и улова в случае неоднородной суммированной по пространству популяции с постоянным миграционным потоком, нашли, что интеграл в правой части равенства (4.1) равен (см. Приложение 4):

$$\iint_{\Omega} M(\mathbf{x}; t) d\mathbf{x} = \frac{-m_0' D\Pi_{\Omega}}{F} (1 - e^{-Ft}). \quad (5.6)$$

Если положить, что:

$$m_0 = -D \oint_{\partial\Omega} m_0' d\mathbf{x} = -m_0' D\Pi_{\Omega}, \quad (5.7)$$

то общее решение для пространственно неоднородной суммированной по полигону популяции (см. формулу (4.1)) будет тем же, что и для пространственно однородной популяции (см. формулу (5.3)):

$$\begin{aligned} N(t) &= e^{-Ft} N_0 + \iint_{\Omega} M(\mathbf{x}; t) d\mathbf{x} = \\ &= N_0 e^{-Ft} + \frac{m_0}{F} (1 - e^{-Ft}). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Сравнение формул (5.8) и (5.3) показывает, что при постоянном миграционном потоке и справедливости соотношения (5.7) равенство (4.3) выполняется.

Подставив значение интеграла из (5.6) в формулу (4.2), найдём с учётом формулы (5.7) уравнение для улова из пространственно неоднородной популяции, суммированной по полигону:

$$\begin{aligned} C(t) &= N_0 (1 - e^{-Ft}) + F \int_0^t \iint_{\Omega} M(\mathbf{x}; \tau) d\tau = \\ &= N_0 (1 - e^{-Ft}) + m_0 \left[ t - \frac{1}{F} (1 - e^{-Ft}) \right], \end{aligned}$$

поскольку (см. Приложение 4):

$$\begin{aligned} \int_0^t \iint_{\Omega} M(\mathbf{x}; \tau) d\mathbf{x} d\tau &= \\ &= \frac{-m_0' D\Pi_{\Omega}}{F} \left[ t - \frac{1}{F} (1 - e^{-Ft}) \right]. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Следовательно, уравнение для улова в случае пространственно неоднородной суммированной по полигону популяции (см. формулу (4.2)), будет тем же, что и для пространственно однородной популяции (см. формулу (5.4)).

Таким образом, в случае постоянной интенсивности миграционного потока общее решение для пространственно неоднородной суммированной по полигону популяции будет тем же, что и для пространственно однородной популяции.

### ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Рассматривая модель пространственно неоднородной популяции, построенную в данной статье в виде уравнений (3.9) — (3.11), следует отметить две особенности, имеющие прикладное значение. С одной стороны, уравнения (3.9) — (3.11) позволяют строить конкретные модели истощения для популяций, как однородных, так и неоднородных по пространству с различными начальными распределениями запаса  $N_0(\mathbf{x})$  и миграционными потоками  $m(t)$ . Тем самым рассматриваемая модель охватывает достаточно широкий круг промысловых ситуаций и даёт в указанном смысле гибкий инструмент моделирования динамики запаса и промысла.

С другой стороны, полученные уравнения, являясь приемлемыми для имитационных вычислительных экспериментов промыслового истощения запаса, пока вряд ли смогут служить в качестве полноценной диагностической модели для его оценки. Причина этого состоит в том, что в регулярной промысловой статистике отсутствует информация о пространственном распределении уловов и промысловых усилий. По указанной причине была построена частная модель истощения для пространственно однородного запаса, позволяющая строить диагностические модели для оценки запаса по временным рядам данных о производительности лова.

Частный случай моделей для открытых популяций, однородных по пространству с постоянной интенсивностью миграционного потока, является наиболее простым и даёт возможность строить на их основе диагностические модели истощения, связывающие доступную промысловую статистику с оценками запаса. Такие модели, в отличие от классических моделей Лесли и Де Лури, позволяют оценивать всю динамику запаса в процессе лова, а не только точно, до начала лова. В этом их новизна и одно из главных положительных отличий. Кроме того, как уже упоминалось, такие



модели целесообразно использовать в тех случаях, когда пространственные эффекты внутри полигона не представляют интереса, а требуется оценить результирующий вклад в запас всех неучтённых факторов либо только миграций.

Например, уравнение (5.5) позволяет построить простую разностную диагностическую модель истощения, поскольку из него следует, что

$$I_t = qN_0 - qC_t + m_t,$$

где  $I_t = qN_t$  — индекс запаса в момент времени  $t$ , измеренный уловом на усилие;  $q$  — коэффициент улавливаемости;  $C_t$  — накопленный к моменту времени  $t$  вылов;  $N_0$  — искомая оценка запаса на начало лова;  $m_t = qm_0t$  — накопленный вклад в запас всех неучтённых факторов или только миграционного потока.

Другой пример применения модели истощения пространственно однородной популяции с переменным миграционным потоком заключается в разделении процессов собственно динамики запаса, миграций и измерений индексов запаса в виде уловов на усилие:

$$N_{t+1} = N_t - C_t + m_t; m_{t+1} = am_t; I_t = qN_t.$$

Эти уравнения позволяют оценить ненаблюдаемый запас и неучтённый вклад в него по данным о вылове и уловах на усилие.

Следует отметить, что в полученных моделях можно оценивать и такие неучтённые факторы динамики запаса, как нелегальный вылов, естественную смертность и пополнение. Для этого потребуются допустить, что указанные факторы воздействуют на запас равномерно по всей области и актуализируются на её границе. В данном случае можно рассматривать нелегальный вылов и естественную смертность как своего рода эмиграцию, а пополнение как иммиграцию. Однако при таком подходе вычленив каждый фактор по отдельности из результирующего вклада в динамику со стороны неучтённых факторов формально вряд ли удастся.

В завершение обсудим корректность уравнения (5.7)  $m_0 = -m'_0 D\Pi_\Omega$ , где  $m_0$  и  $m'_0$  — постоянные интенсивности миграционного потока  $m(t)$  в задачах (2.1) — (2.2) и (3.1) — (3.3) соответственно (см. формулы (5.1)

и (5.2)). Как уже упоминалось, введение этих констант обусловлено необходимостью соблюдать размерность указанных задач. В случае пространственно однородной популяции размерность  $m(t)$ , а следовательно, и  $m_0$  будет [экз. × время<sup>-1</sup>] (см. формулу (2.1)). В пространственно неоднородном случае, как следует из граничного условия (3.3)

$$\mathbf{l} \cdot \nabla N(\mathbf{x}; t) \Big|_{\partial\Omega} = m(t),$$

размерность  $m_0$  равна размерности  $\nabla N(\mathbf{x}; t)$ , а именно: [экз. × расст.<sup>-3</sup>]. Это связано с тем, что запас  $N(\mathbf{x}, t)$  отнесён к точке, и, чтобы получить запас в экземплярах, его нужно интегрировать по площади:

$$N(t) = \iint_{\Omega} N(\mathbf{x}; t) d\mathbf{x}$$

(см. Результаты, раздел 4). Следовательно, размерность  $N(\mathbf{x}, t)$  равна [экз. × расст.<sup>-2</sup>]. Вместе с тем, поскольку диффузионный коэффициент  $D$  имеет размерность [расст.<sup>2</sup> × время<sup>-1</sup>], а  $\Pi_\Omega$  измеряется в единицах расстояния, то произведение  $m_0 D\Pi_\Omega$  имеет размерность [экз. × время<sup>-1</sup>]. Следовательно, размерности в уравнении (5.7) согласованы. При этом для роста численности скалярное произведение  $\mathbf{l} \cdot \nabla N(\mathbf{x}; t) \Big|_{\partial\Omega}$  должно быть отрицательным (см. рис.), т.е.  $m_0 < 0$ . Таким образом, в уравнении (5.7) знаки также согласованы.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье была построена модель истощения неизолированной эксплуатируемой популяции с достаточно произвольными начальными пространственными распределениями и динамикой миграционного потока на границах промыслового района. Указанная модель применима к различным конкретным ситуациям и исследовательским задачам. Однако полученные уравнения, являясь приемлемыми для имитационных вычислительных экспериментов, пока вряд ли могут служить для полноценной оценки запаса по данным промысловой статистики. Тем не менее, с этой задачей справляется модель истощения, построенная для открытого пространственно однородного запаса.

Разработанные в этой статье модели позволяют оценивать всю динамику запаса в процессе лова, а не только до начала лова, в отличие от их классических прототипов, предложенных Лесли и Де Лури. В этом их новизна и одно из главных положительных отличий. Кроме того, указанные модели целесообразно использовать в тех случаях, когда пространственные эффекты внутри полигона не представляют интереса, а требуется оценить результирующий вклад в запас либо всех неучтённых факторов, либо их части, например, миграций и нелегального вылова.

**ЛИТЕРАТУРА**

Бабаян В. К., Булгакова Т. И., Бородин Р. Г., Ефимов Ю. Н. 1984. Применение математических методов и моделей для оценки запасов рыб. Методические рекомендации. М.: ВНИРО. 156 с.

Баранов Ф. И. 1918. К вопросу о биологических основаниях рыбного хозяйства // Изв. Отдела рыбоводства и научно-промысловых исследований. Т. 1. № 1. С. 84–128.

Бородин Р. Г. 1980. Обобщённая модель анализа промысла морских млекопитающих и её применение // Морские млекопитающие. М.: ВНИРО. С. 10–17.

Бородин Р. Г. 1982. Методы оценки состояния запасов морских млекопитающих // Морские млекопитающие. М.: ВНИРО. С. 22–32.

Владимиров В. С. 1981. Уравнения математической физики. М.: Наука. Гл. ред. физ.— мат. лит-ры. 512 с.

Засосов А. В. 1976. Динамика численности промысловых рыб. М.: Пищевая промышленность. 312 с.

Игнатъева А. В., Краснощёкова Т. И., Смирнов В. Ф. 1964. Курс высшей математики. М.: Высшая школа. 684 с.

Карслоу Г., Егер Д. 1964. Теплопроводность твёрдых тел. М.: Наука. Гл. ред. физ.— мат. лит-ры. 487 с.

Рикер У. Е. 1979. Методы оценки и интерпретация биологических показателей популяций рыб. М.: Пищевая промышленность. 408 с.

Свирижев Ю. М. 1987. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. М.: Наука. Гл. ред. физ.— мат. лит-ры. 368 с.

Степанов В. В. 1950. Курс дифференциальных уравнений. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы. 468 с.

Тихонов А. Н., Самарский А. А. 1972. Уравнения математической физики. М.: Наука. Гл. ред. физ.— мат. лит-ры. 735 с.

Allen K. R. 1966. Some Methods for Estimating Exploited Populations // J. Fish. Board Can. V. 23. P. 1553–1574.

Braaten D. O. 1969. Robustness of DeLury population estimator // J. Fish. Res. Board Can. V. 26. P. 339–355.

DeLury D. 1947. On the Estimation of Biological Populations // Biometrics. V. 3. P. 145–167.

Ketchen K. S. 1953. The Use of Catch-Effort and Tagging Data in Estimating a Flatfish Population // J. Fish. Res. Board Can. V. 10. P. 459–485.

Leslie P. H., Davis D. H. S. 1939. An Attempt to Determine the Absolute Number of Rats on a Given Area // J. Anim. Ecol. V. 8. P. 94–113.

McAllister M. K., Hill S. L., Agnew D. J., Kirkwood G. P., Beddington J. R. 2004. A Bayesian Hierarchical Formulation of the De Lury Stock Assessment Model for Abundance Estimation of Falkland Islands' Squid (*Loligo gahi*) // Can. J. Fish. Aquat. Sci. V. 61. P. 1048–1059.

Rosenberg A. A., Kirkwood G. P., Crombie J. A., Beddington J. R. 1990. The Assessment of Stocks of Annual Squid Species // Fish. Res. V. 8. P. 335–350.

Royer J., Pèriès P., Robin J. P. 2002. Stock Assessment of English Channel Loliginid Squids: Updated Depletion Methods and New Analytical Methods // ICES J. Mar. Sci. V. 59. P. 445–457.

**ПРИЛОЖЕНИЕ 1**

Рассмотрим краевую задачу:

$$\frac{\partial G(\mathbf{x}, \xi; t)}{\partial t} = D\Delta G(\mathbf{x}, \xi; t), \quad (\text{П 1.1})$$

$$G(\mathbf{x}, \xi; 0) = \delta(\mathbf{x} - \xi),$$

$$\mathbf{x}, \xi \in \Omega = [0, L_1] \times [0, L_2], \quad (\text{П 1.2})$$

$$\mathbf{l} \cdot \nabla G(\mathbf{x}, \xi; 0) \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \geq 0, \quad (\text{П 1.3})$$

для следующей функции:

$$G(\mathbf{x}, \xi; t) = \frac{1}{S_\Omega} \sum_{k,j} \gamma_{k,j} e^{-\lambda_{k,j}^2 t} \cos\left(\frac{k\pi x_1}{L_1}\right) \times \cos\left(\frac{k\pi \xi_1}{L_1}\right) \cos\left(\frac{j\pi x_2}{L_2}\right) \cos\left(\frac{j\pi \xi_2}{L_2}\right), \quad (\text{П 1.4})$$

$$k, j = 0, 1, 2, \dots$$

В условии (П 1.2)

$$\delta(x) \equiv \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ \infty, & x = 0, \end{cases}$$

— дельта-функция Дирака, для которой выполняются равенства  $\int \delta(x) dx = 1$  и

$$\int \delta(x - y) f(y) dy = f(x),$$

где  $f(x)$  — произвольная непрерывная или финитная функция (см., например, [Владимиров, 1981]).

Покажем, что функция  $G(\mathbf{x}, \xi; t)$  даёт решение задачи (П 1.1) — (П 3.1), т.е. является фундаментальным решением оператора теплопроводности  $\partial/\partial t - D\Delta$  в прямоугольнике  $\Omega = [0, L_1] \times [0, L_2]$  (см., например, [Карслоу, Егер, 1964]). Для доказательства определим  $k, j$ -ю компоненту ряда (П 1.4) формулой:

$$G_{k,j}(\mathbf{x}, \xi; t) = \gamma_{k,j} e^{-\lambda_{k,j}^2 t} \cos\left(\frac{k\pi x_1}{L_1}\right) \times \\ \times \cos\left(\frac{k\pi \xi_1}{L_1}\right) \cos\left(\frac{j\pi x_2}{L_2}\right) \cos\left(\frac{j\pi \xi_2}{L_2}\right), \\ k, j = 0, 1, 2, \dots$$

так что

$$G(\mathbf{x}, \xi; t) = \frac{1}{S_\Omega} \sum_{k,j} G_{k,j}(\mathbf{x}, \xi; t).$$

Для каждой компоненты  $G_{k,j}(\mathbf{x}, \xi; t)$  имеем (см. Приложение 2)<sup>3</sup>:

$$\frac{\partial G_{k,j}}{\partial t} = -\lambda_{k,j}^2 G_{k,j} \text{ и} \\ \Delta G_{k,j} \equiv \frac{\partial^2 G_{k,j}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 G_{k,j}}{\partial x_2^2} = \\ = -\pi^2 \left( \frac{k^2}{L_1^2} + \frac{j^2}{L_2^2} \right) G_{k,j} = -\frac{\lambda_{k,j}^2}{D} G_{k,j}.$$

Сравнение приведённых выше формул показывает, что:

$$\frac{\partial G_{k,j}}{\partial t} = D\Delta G_{k,j}.$$

Тогда верно и уравнение (П 1.1), т.к.

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{1}{S_\Omega} \sum_{k,j} \frac{\partial G_{k,j}}{\partial t} = \frac{D}{S_\Omega} \sum_{k,j} \Delta G_{k,j} = D\Delta G.$$

Для градиента каждой компоненты  $G_{k,j}(\mathbf{x}, \xi; t)$  имеем:

$$\nabla G_{k,j} \equiv \left( \frac{\partial G_{k,j}}{\partial x_1}, \frac{\partial G_{k,j}}{\partial x_2} \right) = -\pi G_{k,j} \boldsymbol{\theta}_{k,j},$$

где

$$\boldsymbol{\theta}_{k,j} = \left( \frac{k}{L_1} \tan\left(\frac{k\pi x_1}{L_1}\right), \frac{j}{L_2} \tan\left(\frac{j\pi x_2}{L_2}\right) \right).$$

Отсюда имеем, что скалярные произведения рассматриваемых компонент с единичной нормалью  $\mathbf{1}$  (см. рис.) будут равны

$$\mathbf{1} \cdot \nabla G_{k,j} \Big|_\Omega = \left( \mathbf{1} \cdot (-\pi G_{k,j} \boldsymbol{\theta}_{k,j}) \Big|_\Omega \right) = \\ = -\pi G_{k,j} \left( \mathbf{1} \cdot \boldsymbol{\theta}_{k,j} \Big|_\Omega \right)$$

Из таблицы ниже следует, что  $\mathbf{1} \cdot \boldsymbol{\theta}_{k,j} \Big|_\Omega = 0$ .

Следовательно, выполняется граничное условие  $\mathbf{1} \cdot \nabla G_{k,j} \Big|_\Omega = 0$  и, в свою очередь, граничное условие (П 1.3):

$$\mathbf{1} \cdot \nabla G \Big|_\Omega = \mathbf{1} \cdot \frac{1}{S_\Omega} \sum_{k,j} \left( \nabla G_{k,j} \Big|_\Omega \right) = \\ = \frac{1}{S_\Omega} \sum_{k,j} \left( \mathbf{1} \cdot \nabla G_{k,j} \Big|_\Omega \right) = 0.$$

Поскольку значение  $\delta(\mathbf{x})$  на прямоугольнике  $\Omega = [0, L_1] \times [0, L_2]$  определено формулой (см., например, [Тихонов, Самарский, 1977]):

<sup>3</sup> Отметим, что в Приложениях аргументы функций в математических выкладках иногда для краткости записи будут опускаться.

**Таблица.** Значения  $\theta_{k,j}$  и компонент векторов  $\nabla\psi$ , а также их скалярные произведения с единичной нормалью  $\mathbf{l}$  (см. рис.)

Координаты границы $d\Omega$		Сегмент границы $d\Omega$ (см. рис.)	Значения компонент вектора $\mathbf{l} = (l_1, l_2)$	$\theta_{k,j} _{\Omega}$	$\mathbf{l} \cdot \theta_{k,j} _{\Omega}$	$\nabla\psi _{\Omega}$	$\mathbf{l} \cdot \nabla\psi _{\Omega}$
$x_1$	$x_2$						
$0 \leq x_1 \leq L_1$	0	Нижний	(0,1)	$\left( \frac{k}{L_1} \tan\left(\frac{k\pi x_1}{L_1}\right), 0 \right)$	0	$\left( \frac{L_1 - 2x_1}{L_1}, 1 \right)$	1
	$L_2$	Верхний	(0,-1)			$\left( \frac{L_1 - 2x_1}{L_1}, -1 \right)$	1
$0 \leq x_1 \leq L_2$	0	Левый	(1,0)	$\left( 0, \frac{j}{L_2} \tan\left(\frac{j\pi x_2}{L_2}\right) \right)$	0	$\left( 1, \frac{L_2 - 2x_2}{L_2} \right)$	1
	$L_2$	Правый	(-1,0)			$\left( -1, \frac{L_2 - 2x_2}{L_2} \right)$	1

$$\delta(\mathbf{x} - \xi) = \frac{1}{S_{\Omega}} \sum_{k,j} \gamma_{k,j} \cos\left(\frac{k\pi x_1}{L_1}\right) \times \cos\left(\frac{k\pi \xi_1}{L_1}\right) \cos\left(\frac{j\pi x_2}{L_2}\right) \cos\left(\frac{j\pi \xi_2}{L_2}\right),$$

$k, j = 0, 1, 2, \dots,$

то начальное условие (П 1.2) также выполнено:

$$G(\mathbf{x}, \xi; 0) = \frac{1}{S_{\Omega}} \sum_{k,j} \gamma_{k,j} \cos\left(\frac{k\pi x_1}{L_1}\right) \times \cos\left(\frac{k\pi \xi_1}{L_1}\right) \cos\left(\frac{j\pi x_2}{L_2}\right) \cos\left(\frac{j\pi \xi_2}{L_2}\right) = \delta(\mathbf{x} - \xi), \quad k, j = 0, 1, 2, \dots$$

Из свойств функции  $\delta(\mathbf{x})$ , описанных выше, следует, что:

$$\iint_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi; 0) d\xi = \iint_{\Omega} \delta(\mathbf{x} - \xi) d\xi = 1.$$

Учитывая равномерную по  $t$  сходимость ряда (П 1.4), для всех  $t > 0$  нашли, что:

$$\iint_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi; t) d\xi = \frac{1}{S_{\Omega}} \left\{ \begin{aligned} & \iint_{\Omega} d\xi + \\ & + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_{k,0}^2 t} \cos\left(\frac{k\pi x_1}{L_1}\right) \iint_{\Omega} \cos\left(\frac{k\pi \xi_1}{L_1}\right) d\xi + \\ & + 2 \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_{0,j}^2 t} \cos\left(\frac{j\pi x_2}{L_2}\right) \iint_{\Omega} \cos\left(\frac{j\pi \xi_2}{L_2}\right) d\xi + \\ & + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_{k,j} e^{-\lambda_{k,j}^2 t} \cos\left(\frac{k\pi x_1}{L_1}\right) \cos\left(\frac{j\pi x_2}{L_2}\right) \times \\ & \times \iint_{\Omega} \cos\left(\frac{k\pi \xi_1}{L_1}\right) \cos\left(\frac{j\pi \xi_2}{L_2}\right) d\xi \end{aligned} \right\},$$

$k, j = 0, 1, \dots,$

Второй и третий кратные интегралы в правой части формулы, приведённой выше, равны нулю, что легко проверить, используя теорему Фубини о перемене порядка интегрирования [Игнатъева и др., 1964; Владимиров, 1981]. Отсюда вытекает, что для всех  $t > 0$ :

$$\iint_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi; t) d\xi = \frac{S_{\Omega}}{S_{\Omega}} = 1.$$

Таким образом, получили, что для всех  $t \geq 0$ :

$$\iint_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi; t) d\xi = 1.$$

Из приведённых выше выкладок следует, что функция источника  $G(\mathbf{x}, \xi; t)$  является фундаментальным решением для задачи (3.1<sub>1</sub>) — (3.3<sub>1</sub>) [Владимиров, 1981]. В этой связи общее решение указанной задачи можно сразу записать с помощью формулы (3.6):

$$n_1(\mathbf{x}; t) = \iint_{\Omega} N'_0(\xi) G(\mathbf{x}, \xi; t) d\xi,$$

задающей так называемый потенциал простого слоя [Владимиров, 1981; Тихонов, Самарский, 1977].

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Решение задачи (3.1<sub>1</sub>) — (3.3<sub>1</sub>) также можно найти с помощью метода Фурье (разделения переменных). Для этого нужно представить его как произведение двух функций, из которых одна зависит только от  $\mathbf{x}$ , а другая — от  $t$ :

$$n_1(\mathbf{x}; t) = u(\mathbf{x})v(t).$$

В новых переменных задача (3.1<sub>1</sub>) — (3.3<sub>1</sub>) приобретает вид:

$$uv' = Dv\Delta u, \quad (\text{П } 2.1)$$

$$n_1(\mathbf{x}; 0) = u(\mathbf{x})v(0) = N'_0(\mathbf{x}),$$

$$\mathbf{x} \in \Omega = [0, L_1] \times [0, L_2], \quad (\text{П } 2.2)$$

$$v(t) \{ \mathbf{l} \cdot \nabla u(\mathbf{x}) |_{\partial\Omega} \} = 0, \quad t \geq 0. \quad (\text{П } 2.3)$$

Уравнение (П 2.1) приводится к виду:

$$\frac{v'(t)}{v(t)} = D \frac{\Delta u(\mathbf{x})}{u(\mathbf{x})} = -\lambda^2,$$

где  $\lambda$ , очевидно, константа. В результате исходная задача распадается на две новые самостоятельные задачи:

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\lambda^2 v(t), \quad t \geq 0, \quad (\text{П } 2.1_v)$$

$$v(0) = v_0, \quad (\text{П } 2.2_v)$$

$$\Delta u(\mathbf{x}) + \frac{\lambda^2}{D} u(\mathbf{x}) = 0,$$

$$\mathbf{x} \in \Omega = [0, L_1] \times [0, L_2], \quad (\text{П } 2.1_u)$$

$$\mathbf{l} \cdot \nabla u(\mathbf{x}) |_{\partial\Omega} = 0. \quad (\text{П } 2.2_u)$$

Задача Коши (П 2.1<sub>v</sub>) — (П 2.2<sub>v</sub>) решается с помощью простого сведения к уравнению в дифференциалах и имеет вид:

$$v(t) = v(0) e^{-\lambda^2 t}. \quad (\text{П } 2.4)$$

Краевая задача (П 2.1<sub>u</sub>) — (П 2.2<sub>u</sub>) для однородного эллиптического уравнения с однородным граничным условием II рода имеет решение в виде:

$$u(x_1, x_2) = \cos(ax_1) \cos(bx_2). \quad (\text{П } 2.5)$$

Подстановка (П 2.5) в (П 2.1<sub>u</sub>) даёт уравнение для определения  $\lambda$ :

$$\frac{\lambda^2}{D} = a^2 + b^2.$$

Используя граничное условие (П 2.2<sub>u</sub>):

$$\begin{aligned} \mathbf{l} \cdot \nabla u(\mathbf{x}) |_{\partial\Omega} &= \\ &= (l_1, l_2) \left[ -a \sin(ax_1) \cos(bx_2), \right. \\ &\quad \left. -b \cos(ax_1) \sin(bx_2) \right] |_{\partial\Omega} = 0, \end{aligned}$$

где  $l_1$  и  $l_2$  — компоненты вектора  $\mathbf{l}$ , показанные в таблице, получаем уравнения для нахождения  $a$  и  $b$ :

$$b \cos(ax_1) \sin(bL_2) = 0,$$

$$a \sin(aL_1) \cos(bx_2) = 0.$$

Приведённым выше уравнениям соответствует бесконечное множество кратных решений:

$$a_k = \frac{k\pi}{L_1}; \quad b_k = \frac{k\pi}{L_2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Следовательно, имеется бесконечное множество констант, удовлетворяющих решению задачи (П 2.1<sub>u</sub>) — (П 2.2<sub>u</sub>):

$$\lambda_{k,j}^2 = D\pi^2 \left( \frac{k^2}{L_1^2} + \frac{j^2}{L_2^2} \right), \quad k, j = 0, 1, 2, \dots$$

Таким образом, получили бесконечное число решений задач (П 2.1<sub>v</sub>) — (П 2.2<sub>v</sub>) и (П 2.1<sub>u</sub>) — (П 2.2<sub>u</sub>) (см. формулы (П 2.4) и (П 2.5)):

$$v_{k,j}(t) = v_{k,j}(0) e^{-\lambda_{k,j}^2 t}, \quad k, j = 0, 1, 2, \dots;$$

$$u_{k,j}(x_1, x_2) = \cos\left(\frac{k\pi x_1}{L_1}\right) \cos\left(\frac{j\pi x_2}{L_2}\right), \quad k, j = 0, 1, 2, \dots$$

Поскольку общее решение линейной задачи является суммой всех её частных решений, то окончательное решение задачи (3.1<sub>1</sub>) — (3.3<sub>1</sub>) даётся рядом:

$$n_1(\mathbf{x}; t) = \sum_{k,j} v_{k,j}(t) u_{k,j}(x_1, x_2) = \sum_{k,j} v_{k,j}(0) e^{-\lambda_{k,j}^2 t} \cos\left(\frac{k\pi x_1}{L_1}\right) \cos\left(\frac{j\pi x_2}{L_2}\right), \quad k, j = 0, 1, 2, \dots$$

Остаётся определить константы  $v_{k,j}(0)$  для всех  $k, j = 0, 1, 2, \dots$ . С помощью начального условия (3.2<sub>1</sub>) получили ряд:

$$n_1(\mathbf{x}; 0) = \sum_{k,j} v_{k,j}(0) \cos\left(\frac{k\pi x_1}{L_1}\right) \cos\left(\frac{j\pi x_2}{L_2}\right), \quad k, j = 0, 1, 2, \dots$$

Далее использовали разложение функции  $N'_0(\mathbf{x})$  в прямоугольнике  $[0, L_1] \times [0, L_2]$  в ряд Фурье:

$$N'_0(\mathbf{x}) = \sum_{k,j} A_{k,j} \cos\left(\frac{k\pi x_1}{L_1}\right) \cos\left(\frac{j\pi x_2}{L_2}\right), \quad k, j = 0, 1, 2, \dots$$

Коэффициенты данного ряда выражаются известными формулами (см., например, [Карслоу, Егер, 1964]):

$$A_{k,j} = \frac{\gamma_{k,j}}{S_\Omega} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} N'_0(x_1, x_2) \cos\left(\frac{k\pi x_1}{L_1}\right) \times \cos\left(\frac{j\pi x_2}{L_2}\right) dx_1 dx_2, \quad k, j = 0, 1, 2, \dots$$

где

$$\gamma_{k,j} = \begin{cases} 1, & k = j = 0; \\ 2, & k = 0, \quad j = 1, 2, \dots \\ & \text{или } j = 0, \quad k = 1, 2, \dots \\ 4, & k, j = 1, 2, \dots; \end{cases}$$

Поскольку рассматриваемый ряд сходится равномерно по  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$  при  $t > 0$ , то изменение порядка суммирования и интегрирования в нём при  $t > 0$  законно [Тихонов, Самарский, 1977]. Тогда формула (3.6) выражает общее решение задачи (3.1<sub>1</sub>) — (3.3<sub>1</sub>):

$$n_1(\mathbf{x}; t) = \left[ \iint_{\Omega} N'_0(\xi) \frac{1}{S_\Omega} \sum_{k,j} \gamma_{k,j} e^{-\lambda_{k,j}^2 t} \times \cos\left(\frac{k\pi x_1}{L_1}\right) \cos\left(\frac{k\pi \xi_1}{L_1}\right) \cos\left(\frac{j\pi x_2}{L_2}\right) \cos\left(\frac{j\pi \xi_2}{L_2}\right) d\xi \right] = \iint_{\Omega} N'_0(\xi) G(\mathbf{x}, \xi; t) d\xi, \quad k, j = 0, 1, 2, \dots$$

### ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Решение задачи (3.1<sub>2</sub>) — (3.3<sub>2</sub>) представили как сумму [Тихонов, Самарский, 1977]:

$$n_2(\mathbf{x}; t) = U(\mathbf{x}; t) + V(\mathbf{x}; t). \quad (\text{П } 3.1)$$

Функция  $U$  подбирается таким образом, чтобы удовлетворить граничному условию:

$$\mathbf{l} \cdot \nabla U(\mathbf{x}, t) \Big|_{\partial\Omega} = M(t), \quad (\text{П } 3.2_U)$$

где функция  $M(t)$  определена в граничном условии (3.3\*). Тогда из формул (3.2<sub>2</sub>) и (П3.2<sub>U</sub>) следует, что  $V(\mathbf{x}, t)$  должно удовлетворять условию:

$$\mathbf{l} \cdot \nabla V(\mathbf{x}, t) \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \geq 0. \quad (\text{П } 3.2_V)$$

Простой способ решения уравнения (П 3.2<sub>U</sub>) состоит в представлении:

$$U(\mathbf{x};t) = \psi(\mathbf{x})M(t), \quad (\text{П } 3.3)$$

и подбора такой функции  $\psi$ , для которой выполнялось бы граничное условие:

$$\mathbf{1} \cdot \nabla \psi(\mathbf{x}) \Big|_{\partial \Omega} = 1. \quad (\text{П } 3.4)$$

Такой подходящей функцией может быть:

$$\psi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1,2} \frac{x_i(L_i - x_i)}{L_i}. \quad (\text{П } 3.5)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \nabla \psi(\mathbf{x}) &\equiv \left( \frac{\partial \psi(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial \psi(\mathbf{x})}{\partial x_2} \right) = \\ &= \left( \frac{L_1 - 2x_1}{L_1}, \frac{L_2 - 2x_2}{L_2} \right) \end{aligned}$$

и условие (П 3.4) выполняется (см. табл.). Для функции  $\psi$ , представленной формулой (П 3.5), лапласиан будет равен константе:

$$\begin{aligned} \Delta \psi(\mathbf{x}) &\equiv \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{x})}{\partial x_2^2} = \\ &= -2 \left( \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) = -\frac{\Pi_{\Omega}}{S_{\Omega}} = \kappa. \end{aligned}$$

В итоге получили, что (см. формулу (П 3.3):

$$\frac{\partial U(\mathbf{x};t)}{\partial t} = \psi(\mathbf{x})M'(t);$$

$$\Delta U(\mathbf{x};t) = \kappa M(t);$$

$$\nabla U(\mathbf{x};t) = M(t) \nabla \psi(\mathbf{x})$$

и, кроме того:

$$U(\mathbf{x};0) = \psi(\mathbf{x})m(0). \quad (\text{П } 3.6)$$

Из приведённых выше формул следует, что

$$\frac{\partial n_2}{\partial t} = \psi M'(t) + \frac{\partial V}{\partial t}$$

и

$$D\Delta n_2 = D\kappa M(t) + D\Delta V.$$

Подстановка последних формул в уравнение (3.1<sub>2</sub>) дает равенство:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = D\kappa M(t) + D\Delta V - \psi M'(t).$$

Из формул (П 3.1), (П 3.2<sub>V</sub>) и (П 3.6) вытекает начальное условие:

$$V(\mathbf{x};0) = -\psi(\mathbf{x})m(0).$$

В результате получили краевую задачу:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = D\Delta V + f(\mathbf{x};t), \quad (\text{П } 3.1_V)$$

$$V(\mathbf{x};0) = \varphi(\mathbf{x}),$$

$$\mathbf{x} \in \Omega = [0, L_1] \times [0, L_2], \quad (\text{П } 3.3_V)$$

с граничным условием (П 3.2<sub>V</sub>) и функциями:

$$f(\mathbf{x};t) = D\kappa M(t) - \psi(\mathbf{x})M'(t), \quad (\text{П } 3.7)$$

$$\varphi(\mathbf{x}) = -\psi(\mathbf{x})m(0). \quad (\text{П } 3.8)$$

Решение краевой задачи (П 3.1<sub>V</sub>) — (П 3.3<sub>V</sub>) было получено стандартным методом в виде суммы потенциалов простого и двойного слоя [Тихонов, Самарский, 1977]:

$$V(\mathbf{x};t) = V_1(\mathbf{x};t) + V_2(\mathbf{x};t). \quad (\text{П } 3.9)$$

Указанные потенциалы имеют вид соответственно:

$$V_1(\mathbf{x};t) = \iint_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi; t) \varphi(\xi) d\xi, \quad (\text{П } 3.10)$$

$$V_2(\mathbf{x};t) = \int_0^t \iint_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi; t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (\text{П } 3.11)$$

Справедливость того, что функция (П 3.9) является решением задачи (П 3.1<sub>V</sub>) — (П 3.3<sub>V</sub>) доказывается непосредственным дифференцированием. При этом частная производная от  $V_2(\mathbf{x}, t)$  по  $t$  находится с помощью правила дифференцирования интеграла по верхнему пределу:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V_2}{\partial t} = \\ & = \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_0^t \iint_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi; t - \tau) f(\xi; \tau) d\xi d\tau \right) = \\ & = \iint_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi; 0) f(\xi; t) d\xi + \\ & + \int_0^t \iint_{\Omega} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \xi; t)}{\partial t} f(\xi; \tau) d\xi d\tau. \end{aligned}$$

Собирая вместе формулы (П 3.1), (П 3.3), (П 3.5), (П 3.9) — (П 3.11), имеем, что решение задачи (3.1<sub>2</sub>) — (3.3<sub>2</sub>) выражается формулой (3.7):

$$\begin{aligned} n_2(\mathbf{x}; t) &= \psi(\mathbf{x}) M(t) + \\ &+ \iint_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi; t) \varphi(\xi) d\xi + \\ &+ \int_0^t \iint_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi; t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда согласно формулам (3.4) и (3.5) общее решение исходной задачи (3.1) — (3.3) представляет формула (3.9):

$$N(\mathbf{x}; t) = e^{-Ft} \iint_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi; t) N'_0(\xi) d\xi + M(\mathbf{x}; t)$$

с миграционным членом, выраженным формулой (3.10):

$$\begin{aligned} M(\mathbf{x}; t) &= m(t) \psi(\mathbf{x}) - \\ &- m(0) e^{-Ft} \iint_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi; t) \psi(\xi) d\xi + \\ &+ \int_0^t \iint_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi; t - \tau) e^{-F(t-\tau)} \left[ \kappa Dm(\tau) - \right. \\ &\left. - F\psi(\xi) m(\tau) - m'(\tau) \psi(\xi) \right] d\xi d\tau. \end{aligned}$$

#### ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Вычислим интеграл по области  $\Omega$  от миграционного члена, выраженного формулой (3.10):

$$\begin{aligned} M(\mathbf{x}; t) &= m(t) \psi(\mathbf{x}) - \\ &- m(0) e^{-Ft} \iint_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi; t) \psi(\xi) d\xi + \\ &+ \int_0^t \iint_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi; t - \tau) e^{-F(t-\tau)} \left[ \kappa Dm(\tau) - \right. \\ &\left. - F\psi(\xi) m(\tau) - m'(\tau) \psi(\xi) \right] d\xi d\tau. \end{aligned}$$

Используя теорему Фубини о замене порядка интегрирования в кратном интеграле и применив равенство (см. Приложение 1):

$$\iint_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi; t) d\xi = 1, \quad t \geq 0,$$

получили, что:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} M(\mathbf{x}; t) d\mathbf{x} &= \left[ m(t) - m(0) e^{-Ft} \right] \iint_{\Omega} \psi(\xi) d\xi + \\ &+ \int_0^t e^{-F(t-\tau)} \left\{ \kappa Dm(\tau) \iint_{\Omega} d\xi - \left[ Fm(\tau) - \right. \right. \\ &\left. \left. - m'(\tau) \right] \iint_{\Omega} \psi(\xi) d\xi \right\} d\tau. \end{aligned}$$

Легко показать, что (см. формулу (П 3.5)):

$$\iint_{\Omega} \psi(\xi) d\xi = \frac{1}{6} (L_1 L_2^2 - L_1^2 L_2) = \frac{S_{\Omega} \Pi_{\Omega}}{12} = \alpha.$$

Тогда, учитывая, что  $\kappa = -\Pi_{\Omega}/S_{\Omega}$  (см. Приложение 3), имеем равенство:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} M(\mathbf{x}; t) d\mathbf{x} &= \alpha \left[ m(t) - m(0) e^{-Ft} \right] - \\ &- \alpha \int_0^t e^{-F(t-\tau)} \left[ Fm(\tau) - m'(\tau) \right] d\tau - \\ &- \Pi_{\Omega} D \int_0^t m(\tau) e^{-F(t-\tau)} d\tau. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям



$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du,$$

где  $u = m(\tau)$ ,  $du = m'(\tau)d\tau$ ,  $v = e^{F\tau}$ ,  
 $dv = d(e^{F\tau})$ ,

получили, что

$$\begin{aligned} & \alpha [m(t) - m(0)e^{-Ft}] = \\ & = \alpha \int_0^t e^{-F(t-\tau)} [Fm(\tau) - m'(\tau)] d\tau \end{aligned}$$

и:

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} M(\mathbf{x}; t) d\mathbf{x} = \\ & = -\Pi_{\Omega} D \int_0^t m(\tau) e^{-F(t-\tau)} d\tau. \end{aligned} \quad (\text{П } 4.1)$$

Если предположить, что функция  $m(t)$  из уравнения (2.1) соотносится с функцией  $m(t)$  из граничного условия (3.3) как

$$m(t)_{(2.1)} = -\Pi_{\Omega} D m(t)_{(3.3)},$$

то уравнение (4.3) выполняется.

В случае  $m(t) = m_0$ , учитывая формулу (П 4.1), указанный выше интеграл даёт формулу (5.6):

$$\iint_{\Omega} M(\mathbf{x}; t) d\mathbf{x} = -\frac{m_0 D \Pi_{\Omega}}{F} (1 - e^{-Ft}).$$

Отсюда легко находится интеграл (5.9):

$$\begin{aligned} & \int_0^t \iint_{\Omega} M(\mathbf{x}; t) d\mathbf{x} d\tau = \\ & = -\int_0^t \left[ \frac{m_0 D \Pi_{\Omega}}{F} (1 - e^{-F\tau}) \right] d\tau = \\ & = \frac{-m_0 D \Pi_{\Omega}}{F} \left[ t - \frac{1}{F} (1 - e^{-Ft}) \right]. \end{aligned}$$

## Solution of Balance Equations for a Model of Fishery Depletion of the Non-Isolated Population

*A.A. Mikheyev*

Sakhalin Research Institute of Fisheries and Oceanography (Yuzhno-Sakhalinsk)

e-mail: alex \_ mikheyev@sakhniro.ru

The known class of models of the fishery depletion is enlarged for a case of the non-isolated population. Dynamics of the local open stock under the fishery influence is described using the balance differential equations. A depletion model for the homogeneous-by-space stock is given as a Cauchy task. Its solution was obtained using the method of the constant variation. The analogous model for the heterogeneous-by-space stock is formulated as a Neumann task with non-stationary boundary conditions. A solution of this task was obtained as the source functions.

**Key words:** stock, fishery, depletion models, non-isolated population, boundary-value problem, differential equations.